Palestrante: Vinícius Morelli Cortes
Título: Funções contínuas que não são deriváveis em nenhum ponto
Resumo: Uma função contínua f :R→R deve necessariamente ser derivável em ao menos um ponto? Essa pergunta simples permaneceu sem resposta desde o advento do cálculo diferencial no século XVII até o início do século XIX. Os primeiros exemplos de funções contínuas em R que não são deriváveis em nenhum ponto foram construídos, de forma independente, por Bernhard Bolzano (1934) e Karl Weierstrass (em palestras ministradas em 1861 e em um artigo publicado em 1872).
Embora tais funções sejam consideradas patológicas, em 1931 o matemático polonês Stefan Banach provou um resultado surpreendente que assegura que, em um certo sentido, a maioria das funções contínuas definidas em um intervalo não é derivável em nenhum ponto:

Teorema 1 ([1], Teorema 1.5.5, pg. 38). O conjunto D_+ de todas as funções contínuas f:[0,1]→R que possuem derivada à direita em ao menos um ponto de [0,1) é um subconjunto magro[1] de C[0,1].

Nesta palestra, pretendemos exibir uma construção elementar de uma função contínua que não é derivável em nenhum ponto, apresentar uma demonstração do Teorema 1 e discutir alguns resultados relacionados. As principais ferramentas necessárias são o Critério M de Weierstrass, o Teorema de Aproximação de Weierstrass e o Teorema de Baire. A ideia é que a apresentação seja acessível para alunos a partir do segundo ano do Bacharelado em Matemática.

[1] Isto é, está contido em uma reunião enumerável de subconjuntos fechados de interior vazio.